UNIVERSITAS NORDICA INTERNATIONALIS

XALQARO NORDIK UNIVERSITETI

Iqtisodiyot va pedagogika fakulteti,
Iqtisodiyot va biznesni boshqarish kafedrasi

Fan o‘qituvchisi: Sabirov Xasan Nusratovich

Mavzu: Chiziqsiz regressiya

Reja:

1. **Ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar o'rtasida bog'lanishlarni o'rganishda chiziqsiz funktsiyalar bilan foydalanish**
2. **Chiziqsiz regressiya modellari**
3. **Chiziqsiz bog'lanishlar uchun korrelyasiya indeksini hisoblash**
4. **"Eng kichik kvadratlar" (EKK) yordamida chiziqsiz regressiya koeffisientlarini hisoblash**

Ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar o'rtasida bog'lanishlarni o'rganishda chiziqsiz funktsiyalar bilan foydalanish

Ijtimoiy-iqtisodiy hodisalar va jarayonlar o`rtasidagi nisbatni hamma vaqt ham chiziqli funktsiyalar bilan ifodalab bo`lmaydi. Masalan, ishlab chiqarish funktsiyalari (ishlab chiqarilgan mahsulotning hajmi bilan asosiy ishlab chiqarish omillari - mehnat, kapital va h.k. o`rtasidagi bog`liqliklar), talab funktsiyalari (tovarlar, xizmatlarga bo`lgan talab bilan ularning narxlari yoki daromad o`rtasidagi bog`liqlik) va hokazolar chiziqsiz bo`lib chiqadi.

Agar iqtisodiy hodisalar o`rtasida chiziqsiz nisbatlar mavjud bo`lsa, u holda ular tegishli chiziqsiz funktsiyalar bilan ifodalanadi. Chiziqsizlik o`zgaruvchilarga nisbatan ham, funktsiyaga kiruvchi koeffisientlar (parametrlar)ga nisbatan ham ifodalanishi mumkin. Chiziqsiz regressiyalarning ikkita sinfi mavjud. Chiziqsiz regressiyalar sinflarining birinchisiga tahlilga kiritilgan o`zgaruvchilar bo`yicha chiziqsiz, lekin baholanayotgan parametrlar bo`yicha chiziqli regressiyalar (turli polinomlar, giperbola) kiradi. Ikkinchi sinfi baholanayotgan parametrlar bo`yicha chiziqsiz regressiyalar (darajali, ko`rsatkichli, eksponentsial funktsiyalar) dan tashkil topadi.

Chiziqli bo`lmagan modellar parametrlarini baholash uchun ikkita yondashuv qo`llaniladi. Birinchi yondashuv modelni chiziqli ko`rinishga keltirishga asoslangan bo`lib, u shundan iboratki, boshlang`ich o`zgaruvchilarni mos tarzda o`zgartirish yordamida tadqiq etilayotgan bog`liqlik o`zgartirilgan o`zgaruvchilar o`rtasidagi chiziqli nisbat ko`rinishida ifodalanadi.

Ikkinchi yondashuv, odatda tegishli chiziqli ko`rinishga keltirilgan o`zgarishni tanlab olish mumkin bo`lmagan holatlarda qo`llaniladi. U holda boshlang`ich o`zgaruvchilar asosida chiziqsiz optimallashtirish usullaridan foydalanish mumkin.

Ko`pincha iqtisodiy tahlilda qo`llaniladigan chiziqli bo`lmagan regressiyalarning turlari quyidagilar: ikkinchi tartibli polinom, giperbola, darajali funktsiya va ko`rsatkichli funktsiya.

Tahlilga kiritilgan o`zgaruvchilar bo`yicha chiziqli bo`lmagan, lekin baholanayotgan parametrlar bo`yicha chiziqli regressiya parametrlarini baholash normal tenglamalarni hal etish yo`li bilan eng kichik kvadratlar usuli yordamida amalga oshiriladi.

Egri chiziqli korrelyatsion bog`liqlikning har qanday shaklidan foydalanishda o`zgaruvchilar o`rtasidagi bog`liqlikning jipsligi xuddi bog`liqlikning chiziqli shakli uchun korrelyatsiya koeffisienti singari aniqlanadigan korrelyatsiya indeksi yordamida o`lchanishi mumkin.

Korrelyatsion bog`liqlik tenglamasi o`rganilayotgan o`zgaruvchilar o`rtasidagi bog`liqlikning mohiyati aniq namoyon bo`lishi, tenglamaning parametrlari esa muayyan tarzda iqtisodiy talqin etilishi uchun imkon qadar soddaroq bo`lishi kerak. Tegishli bog`liqlik tenglamasini tanlash masalasi har bir holatda alohida tarzda hal etiladi.

Chiziqsiz regressiya modellari

Agar iqtisodiy jarayonlar orasida chiziqsiz munosabatlar mavjud bo‘lsa, u holda ular mos ravishda chiziqsiz funksiyalar orqali ifodalanadi: masalan; teng tomonli giperbola, $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon;$

ikkinchi tartibli parabola, $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$ va boshqalar.

Chiziqsiz regressiya ikki sinfga bo‘linadi:

- tenglamaga kiritilgan o‘zgaruvchilarga nisbatan chiziqsiz, lekin baholanuvchi parametrlar bo‘yicha chiziqli regressiyalar;
- aniqlanuvchi parametrlar bo‘yicha chiziqsiz regressiya.

Kiritilgan o‘zgaruvchilarga nisbattan chiziqsiz regressiyaga quyidagi funksiyalar misol bo‘la oladi:

- turli darajali polinomlar-

$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon;\ y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + \varepsilon;$

- teng tomonli giperbola - $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon.$

Baholanuvchi parametrlar bo‘yicha chiziqsiz regressiyaga:

- darajali - $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon;$
- ko‘rsatkichli - $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;
- eksponentsial - $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$

funksiyalar misol bo‘la oladi.

Tenglamaga kiritilgan o‘zgaruvchilar bo‘yicha chiziqsiz regressiyaning parametrlarini baholash ko‘p qiyinchiliklarni yuzaga keltirmaydi. Ular chiziqli regressiyadagi kabi eng kichik kvadratlar usuli (EKKU) bilan aniqlanadi.

Ikkinchi darajali parabola tenglamasida

$y = a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + \varepsilon,$

o‘zgaruvchilarni $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}^2 = x_2$, deb almashtirib quydagi ikki omilli chiziqli regressiya tenglamasini olamiz;

$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon.$

Mos ravishda uchinchi, to‘rtinchi va hokazo $k-$tartibli polinomlarda ushbu usulni qo‘llab, uch, to‘rt va hokazo k omilli chiziqli regressiya modellarini olish mumkin.

Misol uchun $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_k \cdot x^k + \varepsilon$, $k-$ tartibli polinomda $y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_k \cdot x_k + \varepsilon$, ko‘p omilli chiziqli regressiya modelini hosil qilamiz. Ushbu tenglamalarning parametrlarni EKKU bilan hech qanday qiyinchiliksiz aniqlash mumkin.

Chiziqsiz bog'lanishlar uchun korrelyatsiya indeksini hisoblash

Chiziqsiz regressiya tenglamasi chiziqli bog‘lanish kabi korrelyatsiya ko‘rsatkichlari, aynan quyidagi korrelyatsiya indeksi(R) bilan to‘ldiriladi.

$$R = \sqrt{\left(1 - \frac{\sigma^2_{qol}}{\sigma^2_y}\right)},$$

bu yerda: σ^2_y - y natijaviy belgining umumiy dispertsiyasi;

σ^2_{qol} - $\hat{y}_x = f(x)$ regressiya tenglamasidan kelib chiqib aniqlaniladigan qoldiq dispersiya.

Korrelyatsiya indeksini quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}.$$

Ushbu ko‘rsatkichning qiymati $[0,1]$ oralig‘ida yotadi, ya’ni $0 \le R \le 1$, ko‘rsatkich qanchalik 1ga yaqin bo‘lsa o‘rganilayotgan belgilar orasidagi bog‘lanish shunchalik zich bo‘ladi va tuzilgan regressiya tenglamasi shunchalik haqiqatga yaqin bo‘ladi.

Agar korrelyatsiya indeksini kvadratga aylantirsak, natijada aniqlanadigan determinatsiya indeksi deyiladi:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}$$

Determinatsiya indeksi, regressiya modeli bilan izohlangan y belgining dispersiyasi bo'lgan natijaviy belgining umumiy dispersiyasining qaysi ulushini ko'rsatadi. Korrelyatsiya va determinatsiya indeklardan tashqari, elastiklik koeffitsientlari va o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'liqlikning zichligini baholashga imkon beradi. Elastiklikning umumiy koeffitsienti omil belgisi 1% ga o'zgarganda natijaviy ko'rsatkichni taxminan necha foiz o'zgarishini ko'rsatadi.

$$Э = f'(x)\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

Umumlashtiruvchi (o'rtacha) va nuqtali elastiklik koeffitsientlari mavjud. Elastiklikning umumlashtiruvchi koeffitsienti o'rtacha uchun hisoblab chiqiladi va o'rtacha darajasiga nisbatan x 1% ga o'sishi bilan o'rtacha foizga nisbatan necha foiz o'zgarishini ko'rsatadi. Nuqtali elastiklik koeffitsienti ma'lum bir qiymat uchun hisoblanadi $x = x_0$ va x nuqta x_0 darajadan 1% ga oshganda y o'zgaruvchi $y_0(x)$ darajadan necha foiz o'zgarishini ko'rsatadi. x va y o'rtasida o'zaro bog'liqlik turiga qarab elastiklik koeffitsientlarini hisoblash formulalari o'zgaradi. Asosiy formulalar 1-jadvalda keltirilgan.

Faqat darajali funktsiyalari $(y = a * x^b)$ uchun elastiklik koeffitsienti x qiymatdan doimiy mustaqil miqdorni o'zida aks ettiradi (bu holda b parametrga teng). Shuning uchun ekonometrik tadqiqotlarda darajali funktsiyalari keng qo'llaniladi. Bunday funktsiyalardagi b parametr aniq iqtisodiy talqinga ega - bu omil 1% ga oshganda natijaning foiz o'zgarishini ko'rsatadi.

1-jadval

Elastiklik koeffitsientlarini hisoblash formulalari

Funktsiya turi, $y = f(x)$	Elastiklik koeffitsienti
Chiziqli $y = b_0 + b_1 \cdot x$	$Э(x_0) = \dfrac{b_1 \cdot x_0}{b_0 + b_1 \cdot x_0}$
Parabola $y = a + b \cdot x + c \cdot x_2$	$Э(x_0) = \dfrac{(a + 2c + bx_0) \cdot x_0}{a + b \cdot x_0 + c \cdot x_0^2}$
Teng tomonli giperbola $y = a + b / x$	$Э(x_0) = \dfrac{-b}{a \cdot x_0 + b}$
Darajali $y = a \cdot x^b$	$Э(x_0) = b$
Ko'rsatkichli $y = a \cdot b^x$	$Э(x_0) = x_0 \cdot \ln b$

"Eng kichik kvadratlar" (EKK) yordamida chiziqsiz regressiya koeffisientlarini hisoblash

Tajribalar shuni ko‘rsatadiki chiziqsiz regressiyalar ichida ko‘proq ikkinchi tartibli parabola, ayrim hollarda uchinchi tartibli parabola ishlatiladi. Yuqori tartibli polinomlarni qo‘llashdagi chegaralanishlar o‘rganilayotgan to‘plamning bir jinsliligi bilan bog‘liq, polinom darajasi qancha yuqori bo‘lsa egri chiziqdagi sinishlar shuncha ko‘p bo‘ladi va mos ravishda natijaviy belgi to‘plami ham bir jinsli bo‘lmaydi. Undan tashqari ma’lumotlarni to‘plashda va hisoblashlarda noaniqliklar keltirib chiqaradi.

Ikkinchi tartibli parabolani omil belgi qiymatlarining ma’lum bir oraliqda qaralayotgan o‘zgaruvchining bog‘lanish xususiyatini o‘zgarishiga: ya’ni to‘g‘ri bog‘lanishni teskari bog‘lanishga, teskari bog‘lanishni to‘g‘ri bog‘lanishga olib keladigan holatlarda qo‘llash maqsadga muvofiq. Bunday holatlarda omil belgining natijaviy belgini ekstrimal (maksimal yoki minimal) qiymatga erishtiruvchi qiymati aniqlanadi.

Buning uchun ikkinchi darajali parabolaning hosilasi nolga tenglashtiriladi; ya'ni $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ dan hosila olamiz va $b + 2 \cdot c \cdot x = 0$, bundan $x = -\frac{b}{2c}$ hosil bo‘ladi.

Agar berilgan ma'lumatlar bog‘lanish yo‘nalishini o‘zgarishini ta'minlay olmasa, u holda ikkinchi tartibli parabola parametrlarining ma'nosini tushinish qiyin bo‘ladi. Bunday holatda bog‘lanish shakli boshqa chiziqsiz model bilan almashtiriladi.

Ikkinchi darajali parabolaning $a,b,c,$ paramerlarining qiymatlarini topish EKKUni qo‘llab quydagi normal tenglamalar sistemasini matematikaning biror bir usulini qo‘llab yechishga olib keladi:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b \cdot \sum x + c \cdot \sum x^2, \\ \sum y \cdot x = a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 + c \cdot \sum x^3, \\ \sum \mathrm{y} \cdot \mathrm{x}^2 = a \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x^3 + c \cdot \sum x^4. \end{cases} \quad (1)$$

$b > 0$ va $c < 0$ bo‘lganda egri chiziq eng yuqori nuqtaga, ya'ni egri chiziqning sinish, bog‘lanish yo‘nalishini o‘zgartirish nuqtasiga nisbatan simmetrik bo‘ladi, aynan o‘sish pasayishga o‘zgaradi. Bunday funktsiyalarnini iqtisodiyotda jismoniy mehnat bilan shug‘ullanuvchi ishchilarning ish haqini ularning yoshiga bog‘liqligini o‘rganishda kuzatish mumkin. Ishchilarning yoshi kattalashib borgan sari ularning tajribasi ortishi bilan birga ularning malakasi ham yuqorilashib ish haqi ko‘payib boradi. Lekin ma'lum bir yoshdan boshlab organizimni qarishi natijasida mehnat samaradorligini pasayishi ishchining ish haqqini pasayishiga olib kelishi mumkin.

Agar o‘zaro bog‘lanishning parabolik shakli natijaviy ko‘rsatkichni avval o‘sishini, so‘ngra pasayishini namoish etsa, u holda omil belgining natijani maksimumga erishtiradigan qiymati topiladi. Masalan, oilada A maxsulot (birligini) daromad darajasiga bog‘liq holda iste'mol qilinishi $\hat{y}_x = 5 + 60 \cdot x - x^2$ tenglama bilan tavsiflansin. Tenglamaning birinchi tartibli hosilasini nolga tenglab $\hat{y}_x^1 = 60 - 2x = 0$, maksimal iste'mol miqdorini beruvchi daromad qiymatini topamiz, ya'ni $x = 30$ ming so‘mda iste'mol maksimal darajaga etadi.

$b < 0$ va $c > 0$ bo‘lganda ikkinchi darajali parabola o‘zining eng quyi nuqtasiga simmetrik bo‘ladi. Bunday holat funktsiyaning bog‘lanish yo‘nalishini (kamayishni o‘sishga) o‘zgartiruvchi eng kichik qiymatni topish imkonini beradi. Faraz qilaylik ishlab chiqarish harajatlarini ishlab chiqarilgan maxsulot hajmiga bog‘liqligiquyidagi tenglama bilan tavsiflansin:

$$\hat{y}_x = 1200 - 60 \cdot x + 2 \cdot x^2 ,$$

bu holatda eng kam harajatga $x = 15$ maxsulot birligi ishlab chiqarilganda erishiladi $(-60 + 2 \cdot 2 \cdot x = 0)$.

Ikkinchi tartibli parabola egri chizig‘i simmetrik bo‘lganligi sababli u aniq tadqiqotlarda har doim ham qo‘llanilavermaydi. Tadqiqotchi ko‘pincha parabolaning to‘liq shakli bilan emas balki, uning ayrim segmentidan foydalanib ish yuritadi. Parabolik bog‘lanishning parametrlari har doim ham mantiqqa ega bo‘lavermaydi. Shuning uchun bog‘lanish grafigi ikkinchi tartibli parabolani aniq ifodalamasa, u boshqa chiziqsiz funktsiyaga almashtiriladi, masalan darajali funktsiyaga. Ikkinchi tartibli parabola ko‘proq qishloq xo‘jaligida xosildorlikni berilgan o‘g‘itlar miqdoriga bog‘liqligini tavsiflash uchun qo‘llaniladi. Bog‘lanishning bu shakli quyidagicha asoslanadi, -o‘simlikka berilayotgan o‘g‘itning miqdori ortishi bilan hosildorlik, faqat berilayotgan o‘g‘itning miqdori optimal dozasiga etgunga qadar oshib boradi, deyiladi. Dozaning keyingi ortishi o‘simlik uchun zarar va hosildorlikni kamayishiga olib keladi. Shuning uchun amalda bunday bog‘lanish ko‘proq parabolaning segmenti ko‘rinishida beriladi.

Chiziqsiz funktsiyalar sinfida parametrlarning qiymati hech qanday qiyinchiliksiz EKKU bilan aniqlanadigan funktsiya sifatida, ekonometrikada ma’lum bo‘lgan, teng tomonli giperbola $\hat{y}_x = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ ni ko‘rish mumkin. Bunga klassik misol sifatida ishsizlik me’yori (x) va ish haqi (y)ning o‘sish foizi orasidagi munosabatini tavsiflovchi Fillips egri chizig‘i keltiriladi:

$$\hat{y} = a + \frac{b}{x} + \varepsilon \ .$$

Ingliz iqtisodchisi A.V.Fillips 100 yildan ko‘proq davrdagi ma’lumotlarni taxlil qilib XX asrning 50-yillari oxirida ish haqini o‘sib borishi darajasi, ishsizlik darajasiga nisbatan teskari bog‘langanligani aniqlagan.

$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ ko‘rinishidagi teng tomonli giperbolada $\frac{1}{x}$ ni z bilan almashtirib $y = a + b \cdot z + \varepsilon$ chiziqli regressiya tenglamasini olamiz. Uning parametrlarini EKKU bilan aniqlash mumkin .

Ushbu funksiya uchun normal tenglamalar sistemasi quydagidan iborat:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b \cdot \sum \frac{1}{x}, \\ \sum \frac{y}{x} = a \cdot \sum \frac{1}{x} + b \cdot \sum \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$b > 0$ bo‘lganda teskari bog‘lanish bo‘lib, $x \to \infty$ bo‘lganda y a parametr bilan baholanadigan o‘zinig eng kichik qiymatiga erishadi.

$$\hat{y}_x = 0{,}00679 + 0{,}1842 \frac{1}{x}$$

funktsiyasi bilan ifodalanuvchi Fillips egri chizig‘ida a parametrning qiymati 0,00679ga teng, bu ishsizlik darajasining o‘sishi bilan ish haqining qo‘shimcha o‘sishi sur’ati nolga intilishini ko‘rsatadi.

$b < 0$ bo‘lib x cheksizga intilganda ($x \to \infty$) yuqori asimptotaga ega bo‘lgan sekin o‘suvchi, ya’ni $\hat{y}_x = a + \frac{b}{x}$ tenglamada a parametr baho beradigan y ning maksimumga erishuvchi, funktsiyaga ega bo‘lamiz.

Misol sifatida umumiy harajatlar (yoki daromadlar) bilan uzoq muddatli tovarlarga harajatlar ulushi orasidagi bog‘lanishni ko‘rish mumkin. Bunday bog‘lanishning matematik yozuvi ***Engel egri chizig‘i*** deb nom olgan. 1857 yilda nemis statistik olimi E. Engel oila harajatlarini o‘rganish asosida: daromadni ortishi bilan daromadning oziq-ovqatlarga sarf qilinadigan ulushi kamayib borish qonuniyatini aniqlagan. Mos ravishda daromadning ortib borishi bilan daromadning nooziq-ovqat mahsulotlariga sarf qilinadigan ulushi ortib boradi. Lekin bu o‘sish chegarasiz bo‘lmaydi, ya’ni birdan katta yoki 100%dan ko‘p bo‘lmaydi. Ayrim tovarlar uchun bu chegara $\hat{y}_x = a - \frac{b}{x}$ tenglamning a parametri bilan tavsiflanadi. Ushbu tenglamada:

y - nooziq-ovqat tovarlariga harajatlar ulushi;

x - daromad.

Teng tomonli giperbolada a va b parametrlar quyidagicha hisoblanadi:

$$a = \frac{\sum \frac{1}{x^2} \sum y - \sum \frac{y}{x} \sum \frac{1}{x}}{\sum \frac{1}{x^2} - \left(\sum \frac{1}{x} \right)^2}, \quad b = \frac{n \sum \frac{y}{x} - \sum y \sum \frac{1}{x}}{n \sum \frac{1}{x^2} - \left(\sum \frac{1}{x} \right)^2}.$$

Engel egri chizig‘ining modelini yozish uchun $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$ ko‘rinishdagi yarim logarifmik funktsiyalar ham qo‘llaniladi (1943 y. Uorking va 1964 y. Lizer).

$\ln x$ ni z bilan almashtirsak yana $y = a + b \cdot z + \varepsilon$ ko‘rinishidagi chiziqli tenglamani olamiz. Ushbu funktsiya avvalgi funktsiya kabi parametrlar bo‘yicha chiziqli, asosiy x o‘zgaruvchi bo‘yicha esa chiziqli emas. a va b parametrlarni EKKU yordamida aniqlash mumkin. Bunda normal tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a + b \cdot \sum \ln x, \\ \sum y \cdot \ln x = a \cdot \sum \ln x + b \cdot \sum (\ln x)^2. \end{cases}$$

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli va chiziqsiz regressiyaning farqi nimada?
2. Chiziqli bo'lmagan munosabatlar uchun korrelyatsiya qanday aniqlanadi?
3. Determinatsiya koeffitsienti qanday aniqlanadi?
4. Umumiy elastiklik koeffitsientining mohiyatini tushuntiring?
5. Barcha chiziqli bo'lmagan regressiyalar qaysi ikki turga bo'linadi?
6. Darajali chiziqsiz regressiya uchun xos bo'lgan narsa?
7. Parametrlari bo'yicha chiziqli bo'lmagan regressiyalar?
8. Agar korrelyatsiya indeksini kvadratga aylantirsak, natijada aniqlanadigan indeksi nima deb deyiladi?