УДК 519.54

# Оптимальные коэффициенты одной квадратурной формулы

А.К.Болтаев

*Международный университет Нордик,*

*Узбекистан, 100043, Ташкент, ул. Бунёдкор, 8/2.*

e-mail: a.boltayev@nordicuniversity.org

Рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta) \tag{2}$$

где $C_\beta$ и $x_\beta$ называются коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[0,1]$ и $\delta(x)$- дельта функция Дирака.

Пологаем, что функции $\varphi(x)$ принадлежить в гильбертого пространство

$$K_2(P_3) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \middle| \ \varphi'' \text{абсолютно непрерывно и } \varphi''' \in L_2(0,1)\right\}$$

снабженной нормой

$$\left\|\varphi | K_2(P_3)\right\| = \left\{\int_0^1 \left[P_3\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где $P_3(x) = \frac{d}{dx^3}^3 + 1$ и $\int_0^1 \left[P_3\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]^2 dx < \infty$.

Равенство (3) является полу нормой и $\|\varphi\| = 0$ тогда и только тогда когда $\varphi(x) = d_1 e^{-x} + d_2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + d_3 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Следует отметить, что для линейного дифференциального оператора порядка n, $L \equiv P_n\left(\frac{d}{dx}\right)$ Алберг, Нильсон и Уолш в книге [1] исследовалы гильбертовы пространство в контексте обобщенных функций.

Соответсвующий погрешность квадратурной формулы (1) можеть быть выражен в виде

$$R_N(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) = (\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx \tag{4}$$

и является линейным функционалом в сопряженном пространстве $K_2^*(P_3)$ к пространству $K_2(P_3)$.

По неравенству Коши – Шварца

$$\left|\left(\ell,\varphi\right)\right| \le \left\|\varphi\right|K_2\left(P_3\right)\left\| \cdot \right\|\ell\left|K_2^{\,*}\left(P_3\right)\right\|$$

и погрешность (4) можеть быть оценивается с нормой функционала погрешности (2), т.е.

$$\left\|\ell\right|K_2^{\,*}\left(P_3\right)\right\| = \sup_{\left\|\varphi\right|K_2\left(P_3\right)\|=1} \left|\left(\ell,\varphi\right)\right|$$

Таким образом, оценка погрешности квадратурной формулы (1) на пространстве $K_2\left(P_3\right)$ может быть приведен к нахожлению нормы функционала погрешности $\ell\left(x\right)$ в сопряженном пространстве $K_2^{\,*}\left(P_3\right)$.

Очевидно, норма функционала погрешности $\ell\left(x\right)$ зависить от коэффициентов $C_\beta$ и $x_\beta$, $\beta = 0,1,...,N$. Минимизация нормы функционала погрешности по коэффициентам $C_\beta$ когда узли фиксированы называется *Задачей Сарда.* Полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.* Эта задача впервые исследована А. Сардом [2].

В настоящей работе нами получено решение задачи Сарда в пространстве $K_2\left(P_3\right)$. Именно, нами найдены коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$, $\beta = 0,1,...,N$ такой что

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right|K_2^{*}\left(P_3\right)\right\| = \inf_{C_\beta} \left\|\ell\right|K_2^{*}\left(P_3\right)\right\|.$$

Справедливо следующие [3,4]

**Теорема 2**. *Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида (1) в пространстве* $W_2^{P_3}(0,1)$ *имеют вид:*

$$C_0 = 1 - \left(\frac{T}{e^h - 1} + \frac{m_1\tau_1}{e^h - \tau_1} + \frac{m_2\tau_2}{e^h - \tau_2} + \frac{n_1\tau_1^N}{\tau_1 e^h - 1} + \frac{n_2\tau_2^N}{\tau_2 e^h - 1}\right),$$

$$C_\beta = T + m_1\tau_1^\beta + m_2\tau_2^\beta + n_1\tau_1^{N-\beta} + n_2\tau_2^{N-\beta}, \quad \beta = 1,...,N-1,$$

$$C_N = -1 + e^h\left(\frac{T}{e^h - 1} + \frac{m_1\tau_1^N}{e^h - \tau_1} + \frac{m_2\tau_2^N}{e^h - \tau_2} + \frac{n_1\tau_1}{\tau_1 e^h - 1} + \frac{n_2\tau_2}{\tau_2 e^h - 1}\right),$$

*где*

$$\tau_1 = \frac{1}{4}\left[K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4K_2 + 8} + \sqrt{\left(K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4K_2 + 8}\right)^2 - 16}\right]$$

$$\tau_2 = \frac{1}{4}\left[K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4K_2 + 8} - \sqrt{\left(K_1 + \sqrt{K_1^2 - 4K_2 + 8}\right)^2 - 16}\right]$$

*и* $|\tau_1| < 1, |\tau_2| < 1$, *$m_1$, $m_2$, $n_1$ ва $n_2$, $T$, $K_1$, $K_2$ известные, $h$ – малый параметр.*

## Литература


1. Ahlberg J.H., Nilson E.N.,Walsh J.L. The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York _ London (1967).
2. Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas. // American J. of Math. Vol.71, № 1.(Jan.,1949), pp. 80-91.
3. Kholmat Shadimetov and Aziz Boltaev. An exponential-trigonometric optimal interpolation formula. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 10, pp. 4379-4392
4. Boltaev A.K., Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. The extremal function of interpolation formulas in space. Вестник Краунц, Физ-мат, науки, 2021, Т36, №3, -С. 123-132.