УДК 519.54

Об одной усовершенствованном методе по построению оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда

А.К.Болтаев

Международный университет Нордик,

Узбекистан, 100043, Ташкент, ул. Бунёдкор, 8/2.

e-mail: a.boltayev@nordicuniversity.org

Аннотация

Ушбу ишда Сард маъносида оптимал бир квадратур формуланинг коэффициентлари топилган.

In this paper the coefficients of one optimal quadrature formula in the sense of Sard are found

Как известно, приближенное вычисление определенных интегралов с возможно большой точностью является одной из *актуальных задач* вычислительной математики. Это связано с тем, что большинство задач науки и техники приводятся к интегральным или дифференциальным уравнениям, а их решения выражаются с помощью определенных интегралов, которые во многих случаях невозможно вычислить точно [1-4].

В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta), \tag{1}$$

где соответственно, C_β и x_β называются коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $\varphi(x)$ является элементом гильбертова пространства $W_2^{P_3}(0,1)$. Норма функций из пространства $W_2^{P_3}(0,1)$ определяется следующим образом:

$$\left\|\varphi | W_2^{P_3}(0,1)\right\| = \left\{ \int_0^1 \left[P_3\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $P_3(x) = \frac{d^3}{dx^3} + 1$.

Разность между интегралом и квадратурной суммой, т.е.

$$\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) = (\ell, \varphi) \tag{2}$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы (1), и этой разности соответствует функционал погрешности $\ell(x)$, который имеет вид:

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta). \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$- характеристическая функция отрезка $[0,1]$, а $\delta(x)$- дельта функция Дирака.

Задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{P_3}(0,1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \middle| W_2^{P_3*}(0,1) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|\varphi\|\neq 0} \frac{|(\ell,\varphi)|}{\left\|\varphi \middle| W_2^{P_3}(0,1)\right\|}, \tag{4}$$

где $W_2^{P_3*}(0,1)$ - сопряженное пространство к пространству $W_2^{P_3}(0,1)$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\left\|\ell \middle| W_2^{P_3*}(0,1)\right\|$ функционала погрешности ℓ в пространстве $W_2^{P_3*}(0,1)$, а потом минимизировать его по коэффициентам C_β и узлам x_β.

Теперь мы занимаемся решением первой части этой задачи, т.е. вычислением нормы $\left\|\ell \middle| W_2^{P_3*}(0,1)\right\|$ функционала погрешности ℓ. Для этого мы пользуемся понятием экстремальной функции функционала погрешности ℓ, введенным С.Л.Соболевым [5,6].

Функция ψ, для которой выполняется равенство

$$(\ell,\psi) = \|\ell\| \cdot \|\psi\|, \tag{5}$$

называется *экстремальной функцией* функционала погрешности ℓ.Так как пространство $W_2^{P_m}(0,1)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного функционала (см. [7]) существует единственная функция $\psi(x) \in W_2^{P_m}(0,1)$ для которой

$$(\ell,\varphi) = <\psi,\varphi> \tag{6}$$

и $\|\ell\| = \|\psi\|$, где $<\psi,\varphi>$ - скалярное произведение двух функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ из пространства $W_2^{P_3}(0,1)$. Напомним, что скалярное произведение $<\psi,\varphi>$ определяется следующим образом

$$<\psi,\varphi> = \int_0^1 \left(\psi^{(3)}(x) + \psi(x)\right)\left(\varphi^{(3)}(x) + \varphi(x)\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left[P_3\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x)\right] \cdot \left[P_3\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right]dx.$$

В частности, из (6) при $\varphi(x) = \psi(x)$ имеем

$$(\ell,\psi) = <\psi,\psi> = \|\psi\|^2 = \|\psi\| \cdot \|\ell\| = \|\ell\|^2.$$

Отсюда видно, что решение ψ уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией. Таким образом, для того чтобы вычислить норму формула погрешности ℓ, сперва надо решить уравнение (6), т.е. найти экстремальную функцию ψ, а потом вычислить скалярное произведение $(\ell,\psi) = \|\ell\|^2$.

Займемся решением уравнения (6). Интегрируя по частям правую часть уравнения (6), имеем

$$\left(l(x),\varphi(x)\right) = \left(\psi^{(3)}(x) + \psi(x)\right)\varphi''(x)\Big|_0^1 - \left(\psi^{(4)}(x) + \psi'(x)\right)\varphi'(x)\Big|_0^1 +$$

$$+\left(\psi^{(5)}(x) + \psi''(x)\right)\varphi(x)\Big|_0^1 + (-1)^3 \int_0^1 \left(\psi^{(6)}(x) + (-1)^3 \psi(x)\right)\varphi(x)dx. \tag{7}$$

Отсюда, учитывая единственность функции $\psi(x)$, получаем уравнение

$$\psi^{(6)}(x)-\psi(x)=(-1)^3\ell(x) \tag{8}$$

с краевыми условиями

$$\left(\psi^{(3)}(x)+\psi(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0 \tag{9}$$

$$\left(\psi^{(4)}(x)+\psi'(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0 \tag{10}$$

$$\left(\psi^{(5)}(x)+\psi''(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0 \tag{11}$$

В работе [8] для решения уравнения (8) с краевыми условиями (9)-(11) доказана следующая

Теорема 1. *Решение уравнения (8) с краевыми условиями (9)-(11) является экстремальной функцией ψ функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) и имеет вид:*

$$\psi(x)=(-1)^3\ell(x)*G(x)+Y(x)=(-1)^3\int\ell(y)G(x-y)dy+Y(x)$$

где

$$G(x)=\frac{\operatorname{sign}x}{6}\left[shx+e^{\frac{x}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

и $\quad Y(x)=d_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left[C_3\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_4\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right],$

Кроме того, функционал погрешности (2), как показано в [8], удовлетворяет следующим условиям

$$\left(\ell(x),e^{-x}\right)=0,\quad \left(\ell(x),e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)=0,\quad \left(\ell(x),e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)=0 \tag{12}$$

Как было сказано выше, для того чтобы вычислить квадрат нормы $\|\ell\|^2$ функционала погрешности, нам достаточно вычислить скалярное произведение (ℓ,ψ) с учетом условий (12).

Таким образом,

$$\|\ell\|^2=(-1)^m\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\beta C_\gamma G(x_\beta-x_\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\int_0^1 G(x-x_\beta)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\int_0^1 G(x-y)dxdy\right]. \tag{13}$$

Пусть x_β узлы квадратурной формулы (1) фиксированы. Функционал погрешности (3) удовлетворяет условиям (12). Норма функционала погрешности ℓ является многомерной функцией коэффициентов $C_\beta,\ \beta=\overline{0,N}$. Для нахождения точку условного минимума квадрата нормы функционала погрешности (3) при условиях (12) применяем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\Psi\left(C_0,C_1,...,C_N,d_1,d_2,d_3\right)=\left\|\ell\right\|^2-2d_1\left(\ell(x),e^{-x}\right)-$$

$$-2d_2\left(\ell(x),e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)-2d_2\left(\ell(x),e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right). \qquad (14)$$

Приравнивая к нулю частные производные от $\Psi\left(C_0,C_1,...,C_N,d_1,d_2,d_3\right)$ по C_β, $\beta=\overline{0,N}$ и по d_1, d_2 и d_3, получим линейную систему

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G\left(x_\beta-x_\gamma\right)+d_1e^{-x}+d_2e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+d_3e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=f\left(x_\beta\right),\quad \beta=0,1,...,N$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma e^{-h\gamma}=1-\frac{1}{e},$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma e^{\frac{h\gamma}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\gamma\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2},$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma e^{\frac{h\gamma}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\gamma\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

где $G(x)$ – приведен в теореме 1. Справедлива следующая

Теорема 2. *Коэффициенты оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида (1) в пространстве* $W_2^{P_3}(0,1)$ *имеют вид:*

$$C_0=1-\left(\frac{T}{e^h-1}+\frac{m_1\tau_1}{e^h-\tau_1}+\frac{m_2\tau_2}{e^h-\tau_2}+\frac{n_1\tau_1^N}{\tau_1e^h-1}+\frac{n_2\tau_2^N}{\tau_2e^h-1}\right),$$

$$C_\beta=T+m_1\tau_1^\beta+m_2\tau_2^\beta+n_1\tau_1^{N-\beta}+n_2\tau_2^{N-\beta},\quad \beta=1,...,N-1,$$

$$C_N=-1+e^h\left(\frac{T}{e^h-1}+\frac{m_1\tau_1^N}{e^h-\tau_1}+\frac{m_2\tau_2^N}{e^h-\tau_2}+\frac{n_1\tau_1}{\tau_1e^h-1}+\frac{n_2\tau_2}{\tau_2e^h-1}\right),$$

где m_1, m_2, n_1 ва n_2 известны, τ_1,τ_2 приведены в [9],

$$T=\frac{24\left(ch(h)-1\right)\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)-ch\left(\frac{h}{2}\right)\right)^2}{K\left(K_2+2-2K_1\right)}.$$

Литература

1. Kholmat Shadimetov, Aziz Boltaev, Roman Parovik. Optimization of the Approximate Integration Formula Using the Discrete Analogue of a High-Order Differential Operator. Mathematics, 2023, 11, 3114.
2. Boltaev A.K., Shadimetov Kh.M., Parovik R.I. Construction of optimal interpolation formula exact for trigonometric functions by Sobolev's method. Вестник Краунц, Физ-мат, науки, 2022, Т38, №1, -С. 131-146.
3. Kholmat Shadimetov and Aziz Boltaev. An exponential-trigonometric optimal interpolation formula. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 10, pp. 4379-4392

4. Boltaev A.K., Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. The extremal function of interpolation formulas in space. Вестник Краунц, Физ-мат, науки, 2021, Т36, №3, -С. 123-132.
5. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974,- 808 с.
6. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.
7. Колмогоров.А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981, 544с.
8. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Boltaev A.K. About coefficients and order of convergence of the optimal quadrature formula // American Journal of Numerical Analysis, Science and Education Publishing, 2014. Vol.2. №2, pp. 35-48.
9. Болтаев А.К., Нуралиев Ф.А. Об одном дискретном аналоге дифференциального оператора // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2019, №2, -С.71-78.